

PROBLEME

## NOTATIONS ET OBJECTIFS DU PROBLÈME

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension  $n \geq 2$  sur le corps des réels; le produit scalaire et la norme associée sont notés  $(|)$  et  $\| \cdot \|$ .

Étant donné un sous-espace vectoriel  $G$  de  $E$ , on note  $G^\perp$  l'orthogonal de  $G$  dans  $E$ . On dira qu'un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  est somme directe orthogonale de  $r$  sous-espaces vectoriels  $F_1, F_2, \dots, F_r$  de  $E$  si  $F = F_1 \oplus F_2 \dots \oplus F_r$  et si ces sous-espaces sont orthogonaux deux à deux.

Dans tout le problème, on suppose donnés deux sous-espaces  $E_1$  et  $E_2$  de  $E$  dont  $E$  est somme directe orthogonale, de dimensions respectives non nulles  $p$  et  $n-p$ .

On suppose données des bases orthonormales  $B_1 = (e_1, e_2, \dots, e_p)$  et  $B_2 = (e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n)$  de  $E_1$  et de  $E_2$ , dont la réunion  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  fournit une base orthonormale de  $E$ .

On désigne respectivement par  $I_1, I_2$  et  $I$  les applications identiques de  $E_1, E_2$  et  $E$  et par les mêmes symboles les matrices-unités associées.

On suppose données une application linéaire  $f$  de  $E_1$  dans  $E_2$  et une application linéaire  $g$  de  $E_2$  dans  $E_1$  telles que, pour tout couple  $(x_1, x_2)$  d'éléments de  $E_1$  et  $E_2$

$$(1) \quad (f(x_1) | x_2) = (x_1 | g(x_2)).$$

L'objectif du problème est d'étudier l'endomorphisme  $\varphi$  de l'espace  $E$  qui, à tout élément  $x$  de  $E$ , écrit sous la forme  $x = x_1 + x_2$  (où  $x_1 \in E_1$  et  $x_2 \in E_2$ ), associe

$$(2) \quad \varphi(x) = kx_1 + f(x_1) + g(x_2),$$

où  $k$  est un nombre réel donné.

Dans la première partie, on détermine la matrice associée à  $\varphi$  ainsi que le noyau et l'image de cet endomorphisme  $\varphi$ . Dans la troisième partie, on étudie les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $\varphi$  dans le cas où le réel  $k$  est nul et, dans la quatrième partie, les valeurs propres et les sous-espaces propres lorsque ce réel  $k$  est non nul. La deuxième partie est consacrée à l'étude, utile pour la suite, des valeurs propres et des sous-espaces propres des applications  $g \circ f$  et  $f \circ g$ .

## PARTIE I.

1° Matrice associée à  $\varphi$ .

a) Soit  $S$  la matrice associée à  $f$  dans les bases  $B_1$  et  $B_2$ ; déterminer en fonction de  $S$  la matrice associée à  $g$  dans ces bases  $B_2$  et  $B_1$ .

b) Montrer que,  $f$  étant donnée, il existe une application linéaire  $g$  et une seule satisfaisant à la relation (1).

c) Exprimer, à l'aide des matrices  $I_1$  et  $S$ , la décomposition par blocs de la matrice  $T$  associée à  $\varphi$ , dans la base  $B$ .

2° Étude des noyaux et des images de  $f$  et de  $g$ .

$$a) \quad \begin{aligned} \text{Ker } f &= (\text{Im } g)^\perp \cap E_1, \\ \text{Ker } g &= (\text{Im } f)^\perp \cap E_2. \end{aligned}$$

b) En déduire que  $E_1$  est somme directe orthogonale de  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } g$ . Prouver que l'injectivité de  $f$  équivaut à la surjectivité de  $g$ , et que dans ces conditions  $p \leq n-p$ .

c) Énoncer des résultats analogues pour les sous-espaces vectoriels  $\text{Ker } g$  et  $\text{Im } f$ .

d) En utilisant a), exprimer  $(\text{Ker } f)^\perp$  et  $(\text{Ker } g)^\perp$  à l'aide de  $\text{Im } g$  et  $\text{Im } f$ .

3° Étude du noyau de  $\varphi$ .

a) On suppose  $k = 0$ . Exprimer le noyau  $\text{Ker } \varphi$  à l'aide de  $\text{Ker } f$  et de  $\text{Ker } g$ .

b) On suppose  $k \neq 0$ . Déterminer le noyau de  $\varphi$ . Pour cela, on considérera un élément  $x$  de  $\text{Ker } \varphi$ , écrit sous la forme  $x = x_1 + x_2$  et on prouvera que  $x_1$  appartient à  $\text{Ker } f \cap \text{Im } g$ .

4° Étude de l'image de  $\varphi$ .

a) Prouver que l'endomorphisme  $\varphi$  est symétrique.

b) En déduire  $\text{Im } \varphi$  à l'aide de  $\text{Im } f$  et de  $\text{Im } g$ .

PARTIE II. — VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES DE  $g \circ f$  ET  $f \circ g$ 

Pour tout nombre réel  $\lambda$ , on note

$$\begin{aligned} U_\lambda &= \text{Ker } (\lambda I_1 - g \circ f), \\ V_\lambda &= \text{Ker } (\lambda I_2 - f \circ g), \\ F_\lambda &= \text{Ker } (\lambda I - \varphi). \end{aligned}$$

1° Indiquer des propriétés des valeurs propres et des sous-espaces propres  $F_\lambda$  de  $\varphi$ .

2° a) Montrer que  $g \circ f$  est un endomorphisme symétrique de  $E_1$  et que les valeurs propres de cet endomorphisme sont réelles et positives.

b) Étudier de même les valeurs propres de  $f \circ g$ .

3° Prouver les deux relations

$$U_0 = \text{Ker } f \quad \text{et} \quad V_0 = \text{Ker } g$$

4° a) Soit  $\lambda$  un nombre réel *non nul*. Montrer que  $\lambda$  est valeur propre de  $g \circ f$  si et seulement si  $\lambda$  est valeur propre de  $f \circ g$ ; établir  $f(U_\lambda) \subset V_\lambda$  et  $g(V_\lambda) \subset U_\lambda$ .

b) Démontrer que si le réel  $\lambda$  est une valeur propre non nulle de  $g \circ f$ , les deux inclusions précédentes sont des égalités.

Comparer les dimensions de  $U_\lambda$  et  $V_\lambda$ .

5° Étude d'un exemple.

On suppose  $p = 3$ ,  $n = 4$  et  $S = (a, b, c)$  où  $a, b, c$  sont trois réels donnés vérifiant  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ .

Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $f \circ g$  et de  $g \circ f$  et vérifier les résultats précédemment obtenus.

PARTIE III. — VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES DE  $\varphi$  LORSQUE  $k = 0$ 

On se propose de déterminer les sous-espaces vectoriels propres  $F_\lambda$  de  $\varphi$  en fonction des sous-espaces vectoriels propres  $U_\lambda$  de  $g \circ f$  et de  $V_\lambda$ ; le réel  $k$  est nul dans cette partie.

1° Exprimer  $F_0$  à l'aide de  $U_0$  et  $V_0$ . En déduire que  $\varphi$  est un automorphisme de  $E$  si et seulement si  $f$  est un isomorphisme de  $E_1$  sur  $E_2$ .

2° On désigne par  $\sigma$  la symétrie de  $E$ , associée à la décomposition de  $E$  en somme directe  $E = E_1 \oplus E_2$ , définie par  $\sigma(x) = x_1 - x_2$  lorsque  $x = x_1 + x_2$ .

a) Montrer

$$\varphi \circ \sigma = -\sigma \circ \varphi.$$

b) En déduire pour tout réel  $\lambda$ ,  $\sigma(F_\lambda) = F_{-\lambda}$ .

c) En déduire que les valeurs propres non nulles de  $\varphi$  sont deux à deux opposées et comparer les dimensions des deux sous-espaces propres de  $\varphi$  correspondants.

3° Soit  $\lambda$  un nombre réel non nul. On note  $h_\lambda$  l'application de  $E_1$  dans  $E$  définie par

$$h_\lambda(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ x_1 + \frac{1}{\lambda} f(x_1) \right].$$

a) Prouver que  $F_\lambda = h_\lambda(U_{\lambda^2})$ . (On pourra établir successivement les deux inclusions opposées).

b) Montrer que, pour tout couple  $(x_1, y_1)$  d'éléments de  $U_{\lambda^2}$ ,

$$(h_\lambda(x_1) | h_\lambda(y_1)) = (x_1 | y_1).$$

c) En déduire que  $\lambda$  est valeur propre de  $\varphi$  si, et seulement si,  $\lambda^2$  est valeur propre de  $g \circ f$ .

4° a) Établir que  $E$  est somme directe orthogonale des sous-espaces vectoriels  $\text{Ker } f$ ,  $\text{Ker } g$ ,  $F_{\sqrt{\mu}}$  et  $F_{-\sqrt{\mu}}$  où  $\mu$  parcourt l'ensemble des valeurs propres non nulles de  $g \circ f$ .

b) On se place dans le cas particulier où  $f$  est un isomorphisme de  $E_1$  sur  $E_2$ . Alors  $n = 2p$ .

On désigne par  $F_+$  (respectivement par  $F_-$ ) la somme directe des sous-espaces propres  $F_{\sqrt{\mu}}$  (respectivement des sous-espaces propres  $F_{-\sqrt{\mu}}$ ) où  $\mu$  décrit l'ensemble des valeurs propres de  $g \circ f$ .

A partir d'une base orthonormale  $B'_1$  de vecteurs propres de  $g \circ f$ , construire une base  $B'_+$  de  $F_+$  et une base  $B'_-$  de  $F_-$ . En déduire une base  $B'$  orthogonale de vecteurs propres de  $\varphi$ .

c) On se place toujours dans le cas où  $f$  est un isomorphisme de  $E_1$  sur  $E_2$ .

Exprimer la matrice de passage  $Q$  de  $B$  à  $B'$  en fonction de la matrice de passage  $P$  de  $B_1$  à  $B'_1$ , de la matrice  $S$  et d'une matrice  $D$  diagonale dont l'ensemble des éléments diagonaux est égal à celui des valeurs propres de  $g \circ f$ .

PARTIE IV. — VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES DE  $\varphi$  LORSQUE  $k \neq 0$

Dans cette partie, le réel  $k$  est différent de 0.

- 1° a) Déterminer  $F_0$ ; à quelle condition le réel 0 n'est pas valeur propre de  $\varphi$ ?  
 b) Déterminer  $F_k$ ; à quelle condition le réel  $k$  n'est pas valeur propre de  $\varphi$ ?  
 c) Démontrer que si  $\lambda$  est une valeur propre de  $\varphi$  différente de 0 et de  $k$ , les éléments, différents de 0, de  $F_\lambda$  ont des composantes simultanément différentes de 0.

- 2° a) Soit  $\lambda$  un réel différent de 0 et de  $k$ ; établir, avec les notations de la question III. 3°

$$F_\lambda = h_\lambda(U_{\lambda(\lambda-k)}).$$

- b) Montrer que  $\frac{k}{2}$  ne peut être valeur propre et que les valeurs propres de  $\varphi$  vérifient des inégalités simples.

- 3° a) Exprimer  $\varphi \circ \sigma + \sigma \circ \varphi$  à l'aide de  $\sigma$  et de  $I$ .

- b) Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $\varphi$  différente de 0 et de  $k$ .

Établir que le réel  $k - \lambda$  est valeur propre de  $\varphi$  en montrant qu'il existe un réel  $a_\lambda$  tel que

$$(a_\lambda I + \sigma)(F_\lambda) \subset F_{k-\lambda}.$$

- 4° En déduire la liste des sous-espaces propres  $F_\lambda$  de  $\varphi$  dont la somme directe orthogonale est égale à  $E$ .

Concours Commun Mines, Ponts & chaussées  
options M, P'; 1<sup>ère</sup> épreuve de 1989

Corrigé de Dany-Jack MERCIER

**I.1.a** Notons  $S = \text{Mat}(f; B_1, B_2) = (a_{ij})$  et  $V = \text{Mat}(g; B_2, B_1) = (b_{ij})$ .  
On a :  $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n-p} a_{ij} e'_i$  où  $e'_i \doteq e_{p+i}$ , soit  $B_2 = (e_{p+1}, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_{n-p})$ ,  
et :  $g(e'_j) = \sum_{i=1}^p b_{ij} e_i$ .

Il suffit de traduire l'égalité :

$$\begin{aligned} (f(e_j) | e'_k) &= (e_j | g(e'_k)) \\ \left( \sum_{i=1}^{n-p} a_{ij} e'_i | e'_k \right) &= \left( e_j | \sum_{i=1}^p b_{ik} e_i \right) \end{aligned}$$

$$a_{kj} = b_{jk}$$

pour obtenir  $V = {}^t S$ .

**I.1.b**

Si  $f$  est donnée, de matrice  $S$ , et si  $g$  vérifie (1), alors

$$\text{Mat}(g; B_2, B_1) = {}^t S \quad (*)$$

$g$  est donc unique.

Montrons que  $g$  définie par (\*) convient.  $g$  vérifiera par construction :

$$\forall j, k \quad (f(e_j) | e'_k) = (e_j | g(e'_k))$$

Si  $x_1 = \sum_{j=1}^p \xi_j e_j$  et  $x_2 = \sum_{i=1}^{n-p} \eta_i e'_i$ , on aura :

$$\begin{aligned} (f(x_1) | x_2) &= \left( \sum_{j=1}^p \xi_j f(e_j) | \sum_{i=1}^{n-p} \eta_i e'_i \right) = \sum_j \sum_i \xi_j \eta_i (f(e_j) | e'_i) \\ &= \sum_j \sum_i \xi_j \eta_i (e_j | g(e'_i)) = \left( \sum_j \xi_j e_j | \sum_i \eta_i g(e'_i) \right) \\ &= (x_1 | g(x_2)) \quad , \text{ et } g \text{ convient.} \end{aligned}$$

**I.1.c** Si  $x \in E_1$ ,  $\varphi(x) = kx + \beta(x)$

Si  $x \in E_2$ ,  $\varphi(x) = g(x)$

donc la matrice de  $\varphi$  dans la base  $B = B_1 \cup B_2$  sera :

$$T = \begin{pmatrix} \xleftrightarrow{E_1} & \xleftrightarrow{E_2} \\ \begin{array}{c|c} kI_1 & \beta_S \\ \hline S & 0 \end{array} & \begin{array}{c} \updownarrow E_1 \\ \updownarrow E_2 \end{array} \end{pmatrix}$$

**I.2.a**

$$* x_1 \in \text{Ker } \beta \Leftrightarrow \beta(x_1) = 0 \xRightarrow{(1)} 0 = (x_1 | g(x_2)) \quad \forall x_2 \Rightarrow x_1 \in (\text{Im } g)^\perp$$

montre que  $\text{Ker } \beta \subset E_1 \cap (\text{Im } g)^\perp$ .

Réc., si  $x_1 \in E_1 \cap (\text{Im } g)^\perp$ , on a :

$$\forall x_2 \in E_2 \quad (\beta(x_1) | x_2) = (x_1 | g(x_2)) = 0$$

donc  $\beta(x_1) \in E_2 \cap E_2^\perp = \{0\}$ , et  $x_1 \in \text{Ker } \beta$ .

On vient de prouver que  $E_1 \cap (\text{Im } g)^\perp \subset \text{Ker } \beta$ .

Concluons :  $\text{Ker } \beta = (\text{Im } g)^\perp \cap E_1$

\* Les rôles de  $\beta$  et  $g$  étant symétriques, on aura aussi :

$$\text{Ker } g = (\text{Im } \beta)^\perp \cap E_2$$

**I.2.b**

\* D'après I.2.a,  $\text{Ker } \beta \subset (\text{Im } g)^\perp$ , donc

$$\text{Ker } \beta \cap \text{Im } g \subset (\text{Im } g)^\perp \cap \text{Im } g = \{0\}$$

D'après I.1.a,  $\beta$  et  $g$  ont même rang, donc

$$\dim \text{Ker } \beta + \dim \text{Im } g = (\dim E_1 - \text{rg } \beta) + \text{rg } g = \dim E_1$$

et l'on aura bien  $E_1 = \text{Ker } \beta \oplus \text{Im } g$ . (\*)

Résolution :

$(\text{Ker } \beta)^\perp \cap E_1$  est l'orthogonal de  $\text{Ker } \beta$  dans  $E_1$ , donc :

$$E_1 = \text{Ker } \beta \oplus ((\text{Ker } \beta)^\perp \cap E_1)$$

$$\begin{aligned} \text{mais } (\text{Ker } \beta)^\perp \cap E_1 &= ((\text{Im } g)^\perp \cap E_1)^\perp \cap E_1 \\ &= (\text{Im } g \oplus E_1^\perp) \cap E_1 \\ &= (\text{Im } g \oplus E_2) \cap E_1 = \text{Im } g \end{aligned}$$

de sorte que l'on obtienne  $E_1 = \text{Ker } \beta \oplus \text{Im } g$ .

\*  $\beta$  injective  $\Leftrightarrow \text{Ker } \beta = \{0\} \underset{(*)}{\Leftrightarrow} E_1 = \text{Im } g \Leftrightarrow g$  surjective.

\* Enfin,  $g: E_2 \rightarrow E_1$  surjective entraîne :

$$\dim E_2 = n-p \geq \dim E_1 = p$$

$$n-p \geq p$$

NB : Rappelons d'où vient le résultat " $\beta: E \rightarrow F$  surjective  $\Rightarrow \dim F \leq \dim E$ ".

On montre d'abord que si  $E'$  est un supplémentaire de  $\text{Ker } \beta$  dans  $E$ , alors  $\beta|_{E'}: E' \rightarrow \text{Im } \beta$  est un isomorphisme. Cela entraîne que  $E = \text{Ker } \beta \oplus E'$  avec  $E' \simeq \text{Im } \beta$ , donc  $\dim E = \dim \text{Ker } \beta + \dim \text{Im } \beta$  (relation bien connue!). Si  $\beta$  est surjective, alors  $\text{Im } \beta = F$  et cette relation entraîne  $\dim E \geq \dim F$ .

I.2.c  $E_2 = \text{Ker } g \oplus \text{Im } \beta$ , l'injectivité de  $g$  équivaut à la surjectivité de  $\beta$ , et dans ce cas on a  $n-p \leq p$

**I.2.d** On rappelle la relation :

$$(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$$

qui permet d'écrire :

$$(\text{Ker } f)^\perp = ((\text{Im } g)^\perp \cap E_1)^\perp = \text{Im } g + E_1^\perp = \text{Im } g \oplus E_2$$

De même :  $(\text{Ker } g)^\perp = \text{Im } f \oplus E_1$

**I.3.a** Comme  $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ , on a :

$$\begin{aligned} \varphi(x) = 0 &\Leftrightarrow \underbrace{f(x_1)}_{\in E_2} + \underbrace{g(x_2)}_{\in E_1} = 0 \Leftrightarrow f(x_1) = g(x_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = x_1 + x_2 \in \text{Ker } f \oplus \text{Ker } g \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Ker } \varphi = \text{Ker } f \oplus \text{Ker } g} \quad \text{dès que } k=0.$$

**I.3.b**

Si  $x \in \text{Ker } \varphi$ , avec  $x = x_1 + x_2$ , on a :

$$\begin{aligned} \varphi(x) = 0 &\Leftrightarrow \underbrace{kx_1}_{\in E_1} + \underbrace{f(x_1)}_{\in E_2} + \underbrace{g(x_2)}_{\in E_1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} kx_1 + g(x_2) = 0 \\ f(x_1) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{k} g(x_2) \in \text{Im } g \\ x_1 \in \text{Ker } f \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi  $x_1 \in \text{Ker } f \cap \text{Im } g$ , mais  $\text{Ker } f = (\text{Im } g)^\perp \cap E_1$ , donc

$x_1 = 0$  et l'on aura  $g(x_2) = 0$ , soit  $x_2 \in \text{Ker } g$ . On a prouvé :

$$\varphi(x) = 0 \Rightarrow x = x_2 \in \text{Ker } g$$

Réc., si  $x \in \text{Ker } g$ , on constate que  $\varphi(x) = g(x) = 0$ . Donc :

$$\boxed{\text{Ker } \varphi = \text{Ker } g} \quad \text{dès que } k \neq 0$$

**I.4.a** La matrice de  $\varphi$  dans la b.o.  $B$  obtenue en I.1.c est symétrique, de sorte que l'endomorphisme  $\varphi$  soit symétrique.

NB: On peut le vérifier en montrant que  $(\varphi(x)|y) = (x|\varphi(y))$  par le calcul...

### **I.4.b**

On utilise le résultat suivant concernant l'adjoint  $u^*$  d'un endomorphisme  $u$  :

$$\text{Im } u^* = (\text{Ker } u)^\perp \quad \text{et} \quad \text{Ker } u^* = (\text{Im } u)^\perp$$

Ici,  $\varphi$  étant symétrique, on aura :

$$\text{Im } \varphi = (\text{Ker } \varphi)^\perp$$

et on utilise I.3 :

$$\begin{aligned} \text{1 cas : } k=0, \text{ alors } \text{Im } \varphi &= (\text{Ker } f \oplus \text{Ker } g)^\perp \\ &= (\text{Ker } f)^\perp \cap (\text{Ker } g)^\perp \\ &= (\text{Im } g \oplus E_2) \cap (\text{Im } f \oplus E_1) \quad (\text{cf I.2}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Im } \varphi = \text{Im } g \oplus \text{Im } f}$$

$$\text{2 cas : } k \neq 0, \text{ alors } \boxed{\text{Im } \varphi = (\text{Ker } g)^\perp = E_1 \oplus \text{Im } f}$$

**II.1**  $\varphi$  est un endomorphisme symétrique, donc il existera une b.o. formée de vecteurs propres. Ainsi :

- Toutes les racines du polynôme caractéristique de  $\varphi$  sont réelles,
- Les sev propres de  $\varphi$  sont orthogonaux 2 à 2.



**II.2.a**  $g \circ f : E_1 \rightarrow E_1$  est symétrique car :

$$\forall x, y \in E_1, (g \circ f(x) | y) = (f(x) | f(y)) = (x | g \circ f(y))$$

Ainsi toutes les racines du polynôme caractéristique de  $g \circ f$  seront réelles, et  $g \circ f$  sera diagonalisable dans une b.o.

Si  $\lambda$  est une v. propre de  $g \circ f$ , et si  $x$  est un vecteur propre associé,

$$(g \circ f(x) | x) = \lambda \|x\|^2 = (f(x) | f(x)) = \|f(x)\|^2$$

$$\text{d'où} \quad \lambda = \frac{\|f(x)\|^2}{\|x\|^2} \geq 0.$$

**II.2.b**  $f \circ g$  sera, comme  $g \circ f$ , un endomorphisme symétrique positif.

**II.3**  $V_0 = \text{Ker}(g \circ f)$ , et l'on a évidemment :  $\text{Ker } f \subset \text{Ker}(g \circ f)$ .

1<sup>re</sup> solution :

$$g \circ f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) \in \text{Ker } g = (\text{Im } f)^\perp \cap E_2 \quad (\text{d'après I.2.a})$$

$$\Rightarrow f(x) \in \text{Im } f \cap (\text{Im } f)^\perp$$

$$\Rightarrow f(x) = 0$$

preuve bien que  $\text{Ker } g \circ f \subset \text{Ker } f$ .

2<sup>e</sup> solution :

$$\text{Si } g \circ f(x) = 0, \quad (g \circ f(x) | x) = (f(x) | f(x)) = \|f(x)\|^2 = 0$$

entraîne  $f(x) = 0$ , ie  $x \in \text{Ker } f$ .

**II.4.a** Soit  $\lambda \neq 0$ . Si  $\lambda$  est valeur propre de  $g \circ f$ , notons  $x \neq 0$  un vecteur propre associé à  $\lambda$ .  $g \circ f(x) = \lambda x$  entraîne  $f \circ g(f(x)) = \lambda f(x)$  (\*)  $f(x) \neq 0$ , sinon  $x \in \text{Ker } f = \text{Ker } g \circ f$  entraîne  $g \circ f(x) = 0 = \lambda x$  d'où  $\lambda = 0$ , ce qui est absurde. (\*) prouve donc que  $\lambda$  est une valeur propre de  $f \circ g$ . On a même montré que :

$$x \in U_\lambda \Rightarrow f(x) \in V_\lambda$$

$$\text{soit } f(U_\lambda) \subset V_\lambda$$

L'autre cas se démontre pareillement.

**II.4.b**

Notons  $f_1$  (resp.  $g_1$ ) la restriction de  $f$  à  $U_\lambda$  (resp. de  $g$  à  $V_\lambda$ ). On a :

$$\forall x \in U_\lambda \quad g_1 \circ f_1(x) = \lambda x$$

$$\forall y \in V_\lambda \quad f_1 \circ g_1(y) = \lambda y$$

$$\text{Donc } \left(\frac{1}{\lambda} g_1\right) \circ f_1 = \text{Id}_{U_\lambda}$$

$$f_1 \circ \left(\frac{1}{\lambda} g_1\right) = \text{Id}_{V_\lambda}$$

$f_1$  et  $g_1$  seront donc bijectives, et l'on aura :

$$1) \quad f(U_\lambda) \subset V_\lambda \text{ entraîne } f(U_\lambda) = V_\lambda$$

$$2) \quad g(V_\lambda) \subset U_\lambda \quad " \quad g(V_\lambda) = U_\lambda$$

$$3) \quad \dim U_\lambda = \dim V_\lambda$$

$$4) \quad f_1^{-1} = \frac{1}{\lambda} g_1$$

$$\boxed{\text{II.5}} \quad p=3, n=4, S=(a, b, c) = \text{Mat}(f; B_1, B_2)$$

$$\text{On a : } \text{Mat}(g; B_2, B_1) = {}^t S = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\text{Mat}(f \circ g; B_2) = (a \ b \ c) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2) = 1$$

desorte que  $f \circ g = \text{Id}_{E_2}$ , et  $V_1 = E_2$  est une droite.

$$\text{Mat}(g \circ f; B_1) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (a \ b \ c) = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ba & b^2 & bc \\ ca & cb & c^2 \end{pmatrix}$$

\* Recherche des valeurs propres de  $g \circ f$  :

1<sup>ère</sup> solution :

$$\chi_{g \circ f}(X) = \begin{vmatrix} a^2 - X & ab & ac \\ ba & b^2 - X & bc \\ ca & cb & c^2 - X \end{vmatrix}$$

$$= (a^2 - X)((b^2 - X)(c^2 - X) - b^2 c^2) - ab(ba(c^2 - X) - abc^2) \\ + ac(ab^2 c - ca(b^2 - X))$$

$$= (a^2 - X)(b^2 - X)(c^2 - X) + (a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2)X - a^2 b^2 c^2$$

$$= -X^3 + (a^2 + b^2 + c^2)X^2$$

$$= -X^2(X - 1)$$

Les valeurs propres de  $g \circ f$  sont 0 et 1.

2<sup>ème</sup> solution : La matrice de  $g \circ f$  est de rang 1, donc admet les valeurs propres suivantes :

$$\begin{cases} 0 & \text{avec la multiplicité 2} \\ \text{tr}(\text{Mat}(g \circ f; B_1)) = a^2 + b^2 + c^2 = 1 & \text{avec la multiplicité 1} \end{cases}$$

\* Espaces propres de  $g \circ f$  ?

$U_0$  est le plan d'équation  $ax + by + cz = 0$ .

$U_1 = U_0^\perp$  (car  $g \circ f$  est symétrique) sera la droite de vecteur directeur  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ .

\* Cel:  $f: U_1 \rightarrow V_1$  est bien un isomorphisme.

III.1 Ici  $k=0$ , et I.3. a s'applique :

$$F_0 = \text{Ker } T = \text{Ker } f \oplus \underset{\text{II.3}}{\text{Ker } g} = U_0 \oplus V_0$$

Gn a :

$$T \text{ automorphisme} \Leftrightarrow \text{Ker } T = \{0\} \Leftrightarrow U_0 = V_0 = \{0\}$$

et il s'agit de montrer le lemme ci-dessus pour conclure :

Lemme :  $U_0 = V_0 = \{0\} \Leftrightarrow f$  est un isomorphisme de  $E_1$  sur  $E_2$

preuve du lemme :

$U_0 = V_0 = \{0\}$  entraîne l'injectivité de  $g \circ f$  et  $f \circ g$ . Étant en dimension finie, cela équivaut à " $g \circ f$  et  $f \circ g$  sont bijectifs".

Gn a :

$$\left. \begin{array}{l} f \circ g \text{ bijectif} \Rightarrow f \text{ surjectif} \\ g \circ f \text{ bijectif} \Rightarrow f \text{ injectif} \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ bijectif}$$

et  $f: E_1 \rightarrow E_2$  sera un automorphisme.

Réc., si  $f: E_1 \rightarrow E_2$  est un isomorphisme, on a (II.3) :

$$U_0 = \text{Ker } f = \{0\}$$

D'après I.2 :

$f$  injective  $\Rightarrow g$  surjective

$f$  surjective  $\Rightarrow g$  injective

Donc  $g$  sera bijective et (II.3) :

$$V_0 = \text{Ker } g = \{0\}$$

CQFD

**III.2.a** Simple calcul :

$$\varphi \circ \sigma(x) = \varphi(x_1 - x_2) = \beta(x_1) - g(x_2)$$

$$\sigma \circ \varphi(x) = \sigma(\beta(x_1) + g(x_2)) = -\beta(x_1) + g(x_2)$$

**III.2.b**

Si  $x \in F_\lambda$ ,

$$\varphi(\sigma(x)) = -\sigma(\varphi(x)) = -\sigma(\lambda x) = -\lambda \sigma(x)$$

de sorte que  $\sigma(x) \in F_{-\lambda}$

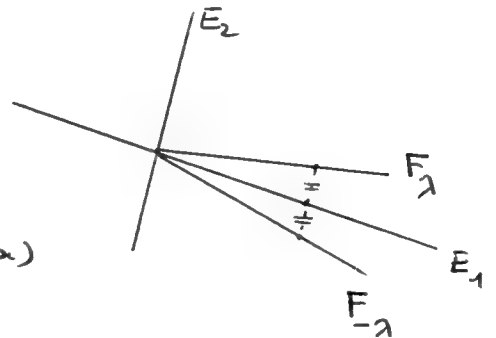
On a montré que  $\sigma(F_\lambda) \subset F_{-\lambda}$

De la même manière :  $\sigma(F_{-\lambda}) \subset F_\lambda$ , ce qui entraîne, puisque  $\sigma$  est involutive :

$$F_{-\lambda} \subset \sigma(F_\lambda).$$

Conclusion :

$$\sigma(F_\lambda) = F_{-\lambda}$$



**III.2.c**

L'égalité  $\sigma(F_\lambda) = F_{-\lambda}$  montre que si  $\lambda$  est valeur propre de  $\varphi$ ,  $-\lambda$  le sera nécessairement, et que  $\dim F_{-\lambda} = \dim \sigma(F_\lambda) = \dim F_\lambda$  (puisque  $\sigma$  est un automorphisme)

### III.3.a

\* Proveons que  $h_\lambda(U_{\lambda^2}) \subset F_\lambda$  (1)

Soit  $x_1 \in U_{\lambda^2}$ . On a  $g \circ f(x_1) = \lambda^2 x_1$ , et :

$$\begin{aligned} \varphi(h_\lambda(x_1)) &= \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_1 + \frac{1}{\lambda} f(x_1)\right)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(x_1) + \frac{1}{\lambda\sqrt{2}} \varphi(f(x_1)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} f(x_1) + \frac{1}{\lambda\sqrt{2}} g \circ f(x_1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} f(x_1) + \frac{1}{\lambda\sqrt{2}} \cdot \lambda^2 x_1 \\ &= \lambda h_\lambda(x_1) \quad \text{d'où (1)} \end{aligned}$$

\* Proveons que  $F_\lambda \subset h_\lambda(U_{\lambda^2})$  (2)

Soit  $x \in F_\lambda$ . On a :

$$x \in F_\lambda \Leftrightarrow \varphi(x) = \lambda x \Leftrightarrow f(x_1) + g(x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_1) = \lambda x_2 \\ g(x_2) = \lambda x_1 \end{cases}$$

Il s'agit de trouver  $y_1 \in U_{\lambda^2}$  tel que  $x = h_\lambda(y_1)$  (3).

$$(3) \text{ équivaut à : } x_1 + x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( y_1 + \frac{1}{\lambda} f(y_1) \right)$$

$$\text{et à : } \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{1}{\lambda\sqrt{2}} f(y_1) \end{cases} \quad (5)$$

Prendons donc  $y_1 \doteq \sqrt{2} \cdot x_1$ . (3) sera prouvé si (5) est vrai.

$$\text{On a : } \frac{1}{\lambda\sqrt{2}} f(y_1) = \frac{1}{\lambda\sqrt{2}} \sqrt{2} f(x_1) = x_2 \quad \text{puisque } x \in F_\lambda. \quad \text{c.q.f.d.}$$

**III.3.b**

$$\begin{aligned}
(h_\lambda(x_1) | h(y_1)) &= \frac{1}{2} \left( x_1 + \frac{1}{\lambda} f(x_1) \mid y_1 + \frac{1}{\lambda} f(y_1) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( (x_1 | y_1) + \frac{1}{\lambda} \underbrace{(x_1 | f(y_1))}_{=0} + \frac{1}{\lambda} \underbrace{(f(x_1) | y_1)}_{=0} + \frac{1}{\lambda^2} (f(x_1) | f(y_1)) \right) \\
&\quad \text{car } E_1 \perp E_2 \\
&= \frac{1}{2} \left( (x_1 | y_1) + \frac{1}{\lambda^2} (x_1 | g \circ f(y_1)) \right) \\
&= (x_1 | y_1) \quad \text{car } g \circ f(y_1) = \lambda^2 y_1 \quad (\text{en effet } y_1 \in U_{\lambda^2})
\end{aligned}$$

**III.3.c** Les 2 questions précédentes montrent que

$$h_\lambda : U_{\lambda^2} \rightarrow F_\lambda$$

est bijective. (a) montre la surjectivité, et b) l'injectivité)

Ainsi :

$$\lambda \text{ valeur propre de } \varphi \Leftrightarrow F_\lambda \neq \{0\} \Leftrightarrow U_{\lambda^2} \neq \{0\} \Leftrightarrow \lambda^2 \text{ valeur propre de } g \circ f$$

NB : On aura même  $\dim U_{\lambda^2} = \dim F_\lambda$ .

**III.4.a**  $\varphi$  est symétrique, donc :

$$E = F_0 \oplus \left( \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(\varphi) \setminus \{0\}} F_\lambda \right)$$

où  $\begin{cases} F_0 = U_0 \oplus V_0 \end{cases}$  d'après III.1

$\begin{cases} \text{Sp}(\varphi) = \text{spectre de } \varphi = \text{ens. des valeurs propres de } \varphi \end{cases}$

On a vu que (III.3.c) :

$$\lambda \in \text{Sp}(\mathfrak{g} \circ \mathfrak{f}) \setminus \{0\} \Leftrightarrow \lambda^2 \in \text{Sp}(\mathfrak{g} \circ \mathfrak{f}) \setminus \{0\}$$

de sorte que tous les éléments de  $\text{Sp}(\mathfrak{g} \circ \mathfrak{f}) \setminus \{0\}$  soient décrits par les nombres  $\pm\sqrt{\mu}$  quand  $\mu$  parcourt  $\text{Sp}(\mathfrak{g} \circ \mathfrak{f}) \setminus \{0\}$ .

On aura bien :

$$E = U_0 \oplus V_0 \oplus \left( \bigoplus_{\mu \in \text{Sp}(\mathfrak{g} \circ \mathfrak{f}) \setminus \{0\}} (F_{\sqrt{\mu}} \oplus F_{-\sqrt{\mu}}) \right)$$

### III.4.b

$$F_+ = \bigoplus_{\mu \in \text{Sp}(\mathfrak{g} \circ \mathfrak{f}) \setminus \{0\}} F_{\sqrt{\mu}}$$

$$F_- = \bigoplus_{\mu \in \text{Sp}(\mathfrak{g} \circ \mathfrak{f}) \setminus \{0\}} F_{-\sqrt{\mu}}$$

$\mathfrak{f}$  est un isomorphisme, donc  $\mathfrak{g}$  aussi (cf I) et  $U_0 = V_0 = \{0\}$ .  
On aura donc :

$$E = F_+ \oplus F_-$$

Soit  $B'_1 = (e'_1, \dots, e'_p)$  une b.o. de vecteurs propres de  $\mathfrak{g} \circ \mathfrak{f}$ .

Soit  $\{\mu_1, \dots, \mu_k\}$  le spectre de  $\mathfrak{g} \circ \mathfrak{f}$ .

III.3 montre que :

$$h_{\sqrt{\mu_i}} : U_{\mu_i} \xrightarrow{\sim} F_{\sqrt{\mu_i}} \quad (*)$$

$$h_{-\sqrt{\mu_i}} : U_{\mu_i} \xrightarrow{\sim} F_{-\sqrt{\mu_i}}$$

sont des isomorphismes qui conservent le produit scalaire  
(cf III.3.b), ie des applications orthogonales.



La b.o.  $B'_1 = (e'_1, \dots, e'_p)$  est formée de vecteurs appartenant aux différents  $U_{\mu_i}$  ( $1 \leq i \leq k$ ). Si, par exemple,  $(e'_1, \dots, e'_{k_1})$  forment une base de  $U_{\mu_1}$ , alors  $(h_{\sqrt{\mu_1}}(e'_1), \dots, h_{\sqrt{\mu_1}}(e'_{k_1}))$  formera une b.o. de  $F_{\sqrt{\mu_1}}$  d'après (a).

Il suffit de mettre les éléments de ces bases de  $F_{\sqrt{\mu_1}}$  et de  $F_{-\sqrt{\mu_1}}$  bout à bout pour obtenir une b.o. de  $E$ .

De façon plus précise, si l'on note  $B'_1 = (e_i^{j(i)})_{i \in N_p}$ ,  
où  $e_i^{j(i)} \in U_{\mu_{j(i)}}$ , alors :

$$B'_+ = (h_{\sqrt{\mu_{j(i)}}}(e_i^{j(i)}))_{i \in N_p}$$

sera une b.o. de  $\bigoplus_{i=1}^k F_{\sqrt{\mu_i}} \doteq F_+$ .

$$\text{Et : } B' = \left( h_{\sqrt{\mu_{j(i)}}}(e_i^{j(i)}) \right)_{i \in N_p} \cup \left( h_{-\sqrt{\mu_{j(i)}}}(e_i^{j(i)}) \right)$$

sera la b.o. cherchée de  $E = F_+ \oplus F_-$ .

du III.4.c

\* But: Exprimer  $Q = P_B^{B'}$ , où  $B = B_1 \cup B_2$  et  $B' = B'_+ \cup B'_-$ , en

$$\text{fonction de } \begin{cases} P = P_{B_1}^{B'_1} \\ S = \text{Mat}(f; B_1, B_2) \\ D \text{ une matrice diagonale.} \end{cases}$$

où  $B'_1 = (e'_1, \dots, e'_p) = b_0$  de vecteurs propres de  $g \circ f$

\* On écrit :  $Q = P_B^{B'} = P_B^{B_0} \cdot P_{B_0}^{B'}$

où  $B_0 \doteq (e'_1, \dots, e'_p, f(e'_1), \dots, f(e'_p))$  est construite à partir de la base  $B'_1 = (e'_1, \dots, e'_p)$  orthogonale de vecteurs propres de  $g \circ f$ .  $B_0$  est bien une base car :

$(f(e'_1), \dots, f(e'_p))$  est une  $b_0$  de  $E_2$

En effet,  $(f(e'_i) | f(e'_j)) = (e'_i | g \circ f(e'_j)) = (e'_i | \mu e'_j) = 0$ .

\* Recherche de  $P_B^{B_0}$

$$B = B_1 \cup B_2 = (e_1, \dots, e_n)$$

$$B_0 = (e'_1, \dots, e'_p, f(e'_1), \dots, f(e'_p))$$

$$P_B^{B_0} = P_{B_1 \cup B_2}^{B'_1 \cup (f(e'_1), \dots, f(e'_p))} = \begin{pmatrix} P_{B_1}^{B'_1} & 0 \\ 0 & \boxed{P_{B_2}^{(f(e'_1), \dots, f(e'_p))}} \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow B_1 \\ \updownarrow B_2 \end{matrix}$$

Comme  $I_p = \text{Mat}(f; (e'_1, \dots, e'_p), (f(e'_1), \dots, f(e'_p)))$

$$= \left( P_{B_2}^{(f(e'_1), \dots, f(e'_p))} \right)^{-1} \cdot S \cdot \underbrace{P_{B_1}^{(e'_1, \dots, e'_p)}}_{= P_{B_1}^{B'_1} = P}$$

on a :  $P_{B_2}^{(f(e'_1), \dots, f(e'_p))} = S P$

donc  $P_{B_0}^{B_0} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & SP \end{pmatrix}$

\* Recherche de  $P_{B_0}^{B'}$

$B' = B'_+ \cup B'_-$  est formée des vecteurs

$$\begin{cases} v_i = h_{\sqrt{\mu_i}}(e'_i) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( e'_i + \frac{1}{\sqrt{\mu_i}} f(e'_i) \right) \\ \text{et} \\ w_i = h_{-\sqrt{\mu_i}}(e'_i) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( e'_i - \frac{1}{\sqrt{\mu_i}} f(e'_i) \right) \end{cases}$$

donc

$$P_{B_0}^{B'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} I & \frac{1}{\sqrt{2}} I \\ \frac{1}{\sqrt{2}} D & -\frac{1}{\sqrt{2}} D \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow \text{base } (e'_1, \dots, e'_p) \\ \updownarrow \text{base } (f(e'_1), \dots, f(e'_p)) \end{matrix}$$

$$\text{où } D = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{\mu_p}} \end{pmatrix}$$

\* Conclusion:

$$Q = P_{B_0}^{B_0} \cdot P_{B_0}^{B'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & SP \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I \\ D & -D \end{pmatrix}$$

apfj

IV.1.a

$F_0 = \text{Ker } \varphi = \text{Ker } g$  d'après I.3.b

On n'est pas vraiment propre de  $\varphi$  si  $\text{Ker } \varphi = \text{Ker } g = \{0\}$ , i.e.  $g$  injective.  
D'après I.2.c, cela équivaut à dire que  $f$  est surjective.

IV.1.b

$$\begin{aligned}
 * \quad x \in F_R = \text{Ker}(kI - \varphi) &\Leftrightarrow \varphi(x) = kx \\
 &\Leftrightarrow kx_1 + f(x_1) + g(x_2) = k(x_1 + x_2) \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} kx_1 + g(x_2) = kx_1 \\ f(x_1) = kx_2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} g(x_2) = 0 \\ f(x_1) = kx_2 \end{cases} \quad (*)
 \end{aligned}$$

(\*) caractérise les éléments de  $F_R$ .

\* Si  $x \in F_R$ , alors (\*) entraîne :  $x_1 \in \text{Ker } g \circ f \doteq U_0$ .

Réciproquement, si  $x_1 \in U_0$ , posons  $x_2 = \frac{1}{k} f(x_1)$ . On aura :

$$\begin{cases} g(x_2) = \frac{1}{k} g \circ f(x_1) = 0 \\ f(x_1) = kx_2 \end{cases}$$

donc  $x = x_1 + x_2 = x_1 + \frac{1}{k} f(x_1)$  sera dans  $F_R$  d'après (\*).

\* On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} k \text{ n'est pas valeur} \\ \text{propre de } \varphi \end{array} \right\} \Leftrightarrow F_R = \{0\} \Leftrightarrow U_0 \setminus \{0\} \Leftrightarrow g \circ f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ injective}$$

(a) (b)

preuve :

(b) provient de  $\text{Ker } g \circ f = \text{Ker } f$  du II.3.

(a) provient des paragraphes précédents : Si  $F_R \neq \{0\}$ , il existe  $x = x_1 + x_2 \in F_R \setminus \{0\}$  et nécessairement  $x_1 \in U_0 \setminus \{0\}$  (en effet, (\*) et  $x_1 = 0$  entraîneraient  $x_2 = \frac{1}{k} f(x_1) = 0$  d'où  $x = 0$ . Absurde).

On a donc montré que :

$$F_k \neq \{0\} \Rightarrow U_0 \neq \{0\}$$

Réciproquement, si  $U_0 \neq \{0\}$ , soit  $x_1 \in U_0 \setminus \{0\}$ . Comme dans le dernier paragraphe, on pose  $x_2 = \frac{1}{k} f(x_1)$  et l'on vérifie que

$$x \doteq x_1 + x_2 \in F_k \setminus \{0\}.$$

et (b) est démontré.

#### IV.1.c

Soit  $\lambda \notin \{0, k\}$

$$\begin{aligned} x \in F_\lambda &\Leftrightarrow T(x) = \lambda x \Leftrightarrow kx_1 + f(x_1) + g(x_2) = \lambda(x_1 + x_2) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (k-\lambda)x_1 + g(x_2) = 0 \\ f(x_1) = \lambda x_2 \end{cases} \quad (*) \end{aligned}$$

(\*) entraîne immédiatement :  $x_1 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$

Ainsi, si  $x \in F_\lambda \setminus \{0\}$ , on a  $x_1 \neq 0$  et  $x_2 \neq 0$

#### IV.2.a

$$Ga: \quad x_1 \in U_{\lambda(\lambda-k)} \Leftrightarrow g \circ f(x_1) = \lambda(\lambda-k)x_1$$

\* Si  $x_1 \in U_{\lambda(\lambda-k)}$ , montrons que  $h_\lambda(x_1) \in F_\lambda$ , ie :

$$T(h_\lambda(x_1)) = \lambda h_\lambda(x_1)$$

$$T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_1 + \frac{1}{\lambda} f(x_1)\right)\right) = \lambda \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_1 + \frac{1}{\lambda} f(x_1)\right)$$

$$kx_1 + f(x_1) + \frac{1}{\lambda} g \circ f(x_1) = \lambda x_1 + f(x_1)$$

cette dernière équation est vraie puisque  $g \circ f(x_1) = \lambda(\lambda-k)x_1$  par hypothèse.

\* Réc., si  $y \in F_\lambda$ , on a  $f(y) = \lambda y$  soit :

$$ky_1 + \beta(y_1) + g(y_2) = \lambda(y_1 + y_2) \quad (*)$$

et il faut trouver  $x_1 \in U_{\lambda(\lambda-k)}$  tel que :

$$y = h_\lambda(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( x_1 + \frac{1}{\lambda} \beta(x_1) \right)$$

$$\text{ie } \begin{cases} y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 \\ y_2 = \frac{1}{\lambda\sqrt{2}} \beta(x_1) \end{cases} \quad (**)$$

Définissons donc  $x_1$  par :

$$x_1 = \sqrt{2} y_1$$

Vérifions que  $y_2 = \frac{1}{\lambda\sqrt{2}} \beta(x_1)$  pour être certains d'avoir (\*\*):

$$\frac{1}{\lambda\sqrt{2}} \beta(x_1) = \frac{1}{\lambda\sqrt{2}} \beta(\sqrt{2} y_1) = \frac{1}{\lambda} \beta(y_1) = y_2 \quad \text{d'après } (*)$$

Vérifions que  $x_1 \in U_{\lambda(\lambda-k)}$ , ce qui achèvera la preuve de  $F_\lambda \subset h_\lambda(U_{\lambda(\lambda-k)})$ .

$$g \circ f(x_1) = g(\lambda\sqrt{2} y_2)$$

$$= \lambda\sqrt{2} g(y_2)$$

$$= \lambda\sqrt{2} (\lambda y_1 - k y_1 - \beta(y_1)) \quad \text{d'après } (*)$$

$$= \lambda\sqrt{2} ((\lambda-k) y_1 + \lambda y_2 - \beta(y_1))$$

$$= \lambda\sqrt{2} \left( (\lambda-k) \frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \beta(x_1) - \beta\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right) \right) \quad \text{d'après } (**)$$

$$= \lambda(\lambda-k) x_1$$

ie  $x_1 \in U_{\lambda(\lambda-k)}$

CQFD

IV.2.b

\*  $h_\lambda$  est injective puisque :

$$h_\lambda(x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1 + \frac{1}{\lambda} f(x_1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

(car  $x_1 \in E_1$ ,  $f(x_1) \in E_2$  et  $E = E_1 \oplus E_2$ )

On vient de montrer que  $F_\lambda = h_\lambda(U_{\lambda(\lambda-k)})$ . Ainsi,  $F_\lambda \neq \{0\}$  entraîne  $U_{\lambda(\lambda-k)} \neq \{0\}$ .

En d'autres termes, si  $\lambda$  est valeur propre de  $\varphi$ ,  $\lambda(\lambda-k)$  sera valeur propre de  $g \circ f$ . II.2.a impose alors la condition :

$$\lambda(\lambda-k) \geq 0$$

d'où :

- Si  $k > 0$ ,  $\lambda \leq 0$  ou  $\lambda \geq k$
- Si  $k < 0$ ,  $\lambda \leq k$  ou  $\lambda \geq 0$

\* Si  $\lambda = \frac{k}{2}$  ne sera jamais une valeur propre de  $\varphi$  puisque n'est jamais à l'extérieur de l'intervalle d'extrémités 0 et k.

IV.3.a

$$\begin{aligned} \varphi \circ \sigma + \sigma \circ \varphi(x) &= \varphi(x_1 - x_2) + \sigma(kx_1 + f(x_1) + g(x_2)) \\ &= kx_1 + f(x_1) - g(x_1) + kx_1 - f(x_1) + g(x_2) \\ &= 2kx_1 \\ &= k(x + \sigma(x)) \\ &= k(I + \sigma)(x) \end{aligned}$$

Ainsi

$\varphi \circ \sigma + \sigma \circ \varphi = k(I + \sigma)$

IV.3.b

\* On cherche  $a_\lambda$  tel que  $(a_\lambda I + \sigma)(x) \in F_{k-\lambda}$  pour tout  $x \in F_\lambda$ .  
On a :

$$\begin{aligned}\varphi((a_\lambda I + \sigma)) &= a_\lambda \varphi + \varphi \circ \sigma \\ &= a_\lambda \varphi + k(I + \sigma) - \sigma \circ \varphi\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\varphi(a_\lambda I + \sigma)(x) &= a_\lambda \cdot \lambda x + k(I + \sigma)(x) - \sigma(\lambda x) \\ &= (\lambda a_\lambda + k)x + (k - \lambda)\sigma(x)\end{aligned}$$

On désire que cela soit égal à  $(k - \lambda)(a_\lambda x + \sigma(x))$ , ce qui revient à choisir  $a_\lambda$  tel que :

$$\lambda a_\lambda + k = (k - \lambda)a_\lambda$$

$$a_\lambda = \frac{k}{k - 2\lambda}$$

C'est possible car  $\frac{k}{2}$  ne peut être valeur propre de  $\varphi$  (IV.2.b).

\* Alors, si  $a_\lambda I + \sigma$  est injectif,

$$\left. \begin{array}{l} \lambda \text{ valeur propre} \\ \text{de } \varphi \text{ autre que } 0 \\ \text{et } k \end{array} \right\} \Leftrightarrow F_\lambda \neq \{0\} \Rightarrow (a_\lambda I + \sigma)(F_\lambda) \neq \{0\} \subset F_{k-\lambda} \\ \Rightarrow F_{k-\lambda} \neq \{0\} \\ \Rightarrow k - \lambda \text{ val. propre de } \varphi.$$

L'injectivité de  $a_\lambda I + \sigma$  se montre facilement :

$$(a_\lambda I + \sigma)(x) = 0 \Leftrightarrow a_\lambda(x_1 + x_2) + x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow (a_\lambda + 1)x_1 = 0 = (a_\lambda - 1)x_2$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$$

car  $a_\lambda \neq \pm 1$  (en effet,  $a_\lambda = \pm 1 \Rightarrow \frac{k}{k - 2\lambda} = \pm 1 \Rightarrow \lambda \in \{0, k\}$  est exclu)



